Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen

6 juli 2007, 14.00-17.00 uur.

Voor de opgave 1 t/m 3 zijn maximaal 2 punten per opgave te behalen; voor 4-5 max. 1.5 punt/opgave. Totaal: 9 + 1 (gratis) punten. Dit is een gesloten boek tentamen. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes!

1. Beschouw de p.d.v.

$$u_t + u_x = x$$

   (a) Neem

   $$u(x,0) = f(x)$$

   en los het beginwaarde probleem op.

   (b) Toon vervolgens aan dat het verwante probleem met beginvoorwaarde

   $$u(x,x) = 1$$

   geen oplossing heeft.

   (c) Onder welke beginvoorwaarde(n) op de kromme $t = x$ heeft de bovenstaande pdv wel een oplossing?

2. Beschouw de potentiaalvergelijking

$$\Delta u = 0 \qquad \text{op} \qquad -\infty < x < \infty \quad \text{en} \quad y \geq 0$$

   (a) Neem als randvoorwaarden

   $$u(x,0) = 0 \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{n} \sin{(nx)}$$

   ($n > 0$) en bepaal de bijbehorende oplossing (gebruik separatie van variabelen); noem deze u_n.

   (b) Laat $n \to \infty$. Wat is de oplossing van het 'limiet' probleem met als randvoorwaarden $u(x,0) = 0$ en $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; noem deze oplossing u_{lim}

   (c) Nadert u_n naar u_{lim} als n naar oneindig gaat? Breng dit in verband met het slecht-gesteld zijn van het probleem.

3. De Sturm-Liouville differentiaaloperator L wordt gegeven door

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y$$

   waarbij $0 < x < 1$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Laat deze operator werken op functies $y(x)$ die voldoen aan de randvoorwaarden $y(0) - \alpha y'(0) = 0$ en $y(1) + \beta y'(1) = 0$, waarbij de constantes α en β groter dan nul zijn.

(a) Bewijs dat (onder deze randvoorwaarde) de operator L positief is, d.w.z.

$$\int_0^1 uLudx > 0 \quad \text{als} \quad u \neq 0.$$

(b) Bewijs dat L zelf-geadjungeerd is,d.w.z

$$\int_0^1 uLvdx = \int_0^1 vLudx$$

(voor alle u en v die aan de gegeven randvoorwaarden voldoen).

(c) Beschouw $Ly = 0$. Aan welke randvoorwaarde moet de Greense functie voor dit probleem voldoen?

4. Voor $T > 0$ beschouwen we $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$. Neem aan dat $u(x,t)$ voor $(x,t) \in Q_T$ voldoet aan de ongelijkheid

$$u_t - a(x,t)u_{xx} - b(x,t)u_x < 0$$

waarbij $a(x,t) \geq 0$ in Q_T. Toon aan dat $u(x,t)$ geen lokaal maximum kan aannemen in Q_T.

5. Zij $\mathbf{u} = (u_1, u_2, .., u_n)$ en $\mathbf{A}$ een $n \times n$ matrix met constante elementen en n lineair onafhankelijke eigenvectoren. Beschouw het probleem

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0 \qquad x > 0, \quad t > 0$$

met $\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{0}$ voor $x \geq 0$. Aan welke condities op $x = 0$, $t > 0$ moet $\mathbf{u}$ voldoen opdat de oplossing $\mathbf{u}(x,t)$ kan worden bepaald voor alle x en t?